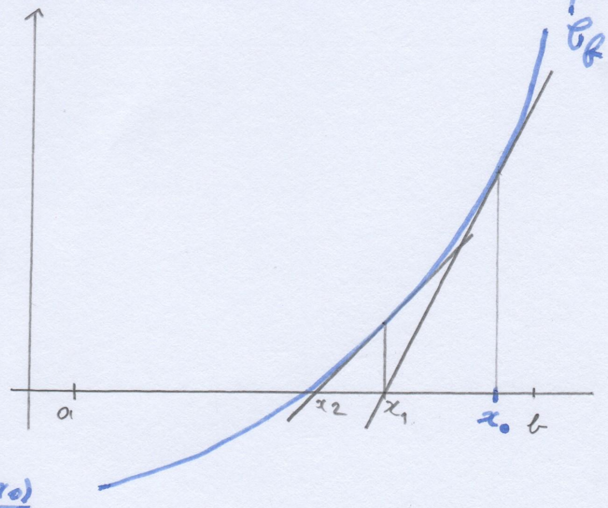
Rom	Méthode de Newton	L 218 L228 L 223 L229 L 224 L253 L 226 L209

Th : Soit $f \in \mathcal{C}^2([a,b],\mathbb{R})$ tq $f(a) < 0 < f(b)$ et $\forall x \in [a,b]$, $f'(x) > 0$.
alors $\exists ! \alpha \in [a,b]$ tq $f(\alpha) = 0$, et on peut construire par récurrence (x_n) tq $\exists \delta > 0$. $\forall x_0 \in [\alpha - \delta ; \alpha + \delta]$, (x_n) converge vers α quadratiquement.
Si de plus, $\forall x \in [a,b]$, $f''(x) > 0$, alors $\forall x_0 \in]\alpha, b]$, (x_n) CV vers α.

Démonstration : ① Construction de la suite (x_n).

Comme f est continue sur $[a,b]$ et $0 \in]f(a), f(b)[$,
d'après le th des valeurs intermédiaires, $\exists \alpha \in]a,b[$ tq $f(\alpha) = 0$.
De plus, comme $f' > 0$, f est strictement croissante donc α est unique.



Soit $x_0 \in [a,b]$.
La tangente en f en x_0 a pour équation
$T_{x_0} : y = (x - x_0) f'(x_0) + f(x_0)$
Comme localement, la courbe $\mathcal{C}_f$ est proche de la tangente en x_0,
on regarde l'absisse d'annulation de T_{x_0}.
Comme $f'(x_0) \neq 0$, $\exists ! x_1 \in \mathbb{R}$ tq $T_{x_0}(x_1) = 0$.

$$0 = (x_1 - x_0) f'(x_0) + f(x_0) \iff x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

On pose $g : x \mapsto x - \frac{f(x)}{f'(x)}$ et $x_1 = g(x_0)$.

On peut réitérer le processus à partir de x_1.
On crée ainsi $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ avec $\begin{cases} x_0 \in [a,b] \\ \forall n \in \mathbb{N}, \ x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \end{cases}$.

Nous allons montrer que si l'initialisation x_0 est proche de α (par exemple déterminé par dichotomie), (x_n) CV vers α quadratiquement.

Si de plus, f est strictement convexe, nous allons montrer que cette convergence à lieu quelque soit l'initialisation x_0.

② Montrons que (x_n) CV quadratiquement vers α.

Comme $f(\alpha)=0$, on a $\forall x \in [a,b]$,

$$g(x)-\alpha = x-\alpha-\frac{f(x)}{f'(x)} = \frac{f(\alpha)-(\alpha-x)f'(x)-f(x)}{f'(x)}$$

D'après la formule de Taylor-Lagrange à l'ordre 2 à f en x :

$\exists c_x \in [\min(\alpha,x), \max(\alpha,x)]$ tq $f(\alpha)=f(x)+(\alpha-x)f'(x)+\frac{1}{2}(\alpha-x)^2 f''(c_x)$

d'où $g(x)-\alpha = \frac{1}{2}\cdot\frac{f''(c_x)}{f'(x)}\cdot(x-\alpha)^2$.

On pose $C = \dfrac{\max_{[a,b]}|f''|}{2\min_{[a,b]}|f'|} > 0$ (on peut supposer f non affine)

De sorte que : $\forall x \in [a,b]$, $|g(x)-\alpha| \leqslant C\cdot|x-\alpha|^2$

Soit δ assez petit pour que : $C\cdot\delta<1$ et $I=[\alpha-\delta, \alpha+\delta]\subset[a,b]$,

alors $\forall x\in I$, $|g(x)-\alpha| \leqslant C\cdot|x-\alpha|^2 \leqslant C\cdot\delta^2<\delta$ d'où $g(I)\subset I$

Ainsi, si $x_0\in I$, on a $\forall n\in\mathbb{N}$, $x_n\in I$.

De plus, $|x_{n+1}-\alpha| = |g(x_n)-\alpha| \leqslant C\cdot|x_n-\alpha|^2$, d'où : $C\cdot|x_n-\alpha| \leqslant (C|x_0-\alpha|)^{2^n} \leqslant (C\delta)^{2^n}$

Comme $C\delta<1$, on a $\lim_{n\to\infty} x_n=\alpha$.

Enfin, $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $\dfrac{x_{n+1}-\alpha}{(x_n-\alpha)^2} = \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{f''(c_{n+1})\cdot(x_n-\alpha)^2}{f'(x_n)\cdot(x_n-\alpha)^2} = \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{f''(c_{n+1})}{f'(x_n)}$

Or par encadrement, $c_{n+1} \to \alpha$ puis comme $f\in\mathcal{C}^2$, $f''(c_{n+1})\to f''(\alpha)$

De m̂ $f'(x_n)\to f'(\alpha)$ d'où $\lim_{n\to\infty}\dfrac{x_{n+1}-\alpha}{(x_n-\alpha)^2} = \dfrac{1}{2}\dfrac{f''(\alpha)}{f'(\alpha)}$: la CV est quadratique

③ Supposons de plus : $\forall x\in]\alpha,b]$, $f''(x)>0$, alors $f(x)>0$.

Soit $x\in]\alpha,b]$, d'une part, $g(x)=x-\dfrac{f(x)}{f'(x)}<x\leqslant b$.

D'autre part, $g(x)-\alpha = \dfrac{1}{2}\dfrac{f''(c_x)}{f'(x)}(x-\alpha)^2>0$ d'où $g(x)\in]\alpha,b]$

Ainsi, $g(]\alpha,b])\subset]\alpha,b]$ puis la suite (x_n) est bien définie à valeurs ds $]\alpha,b]$.

De plus, $\forall n\in\mathbb{N}$, $x_{n+1}=g(x_n)<x_n$: (x_n) strictemt décroissante.

D'après le th des suites monotones, elle converge. On note $\ell=\lim x_n$.

ℓ vérifie $g(\ell)=\ell \iff 0=-\dfrac{f(\ell)}{f'(\ell)} \iff f(\ell)=0 \iff \ell=\alpha$

D'où $\lim_{n\to\infty} x_n=\alpha$.